O PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Paulo Cezar Pinto Carvalho - IMPA

♦ Nível Intermediário

Muitos problemas atraentes de matemática elementar exploram relações entre conjuntos finitos, expressas em linguagem coloquial. Parte de sua atração vem justamente do fato de que podem ser formulados e, muitas vezes, resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 1. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há duas que fazem aniversário no mesmo mês?

Solução: A resposta é 13. Se houvesse apenas 12 pessoas, seria possível que cada uma delas fizesse aniversário em um mês diferente. Com 13 pessoas, há , obrigatoriamente, pelo menos um mês com mais de um aniversário (se houvesse, no máximo, um aniversário por mês, o número de pessoas presentes seria, no máximo, 12).

O argumento empregado acima é conhecido como *Princípio das Gavetas de Dirichlet* ou *Princípio das Casas do Pombos*. Um possível enunciado para este princípio é o seguinte:

Se n objetos forem colocados em, no máximo, $n - 1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

(Uma maneira um pouco mais formal de dizer o mesmo é: *se o número de elementos de um conjunto finito* A *é maior do que o número de elementos de um outro conjunto* B, *então uma função de* A *em* B *não pode ser injetiva*.)

Embora trate-se de um fato extremamente elementar, ele é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos objetos e quem faz o papel das gavetas.

Exemplo 2. Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução: Neste caso, os objetos são os alunos e as gavetas são as possíveis seqüências de respostas . Como cada questão pode ser respondida de 5 modos, a prova pode ser preenchida de $5 \times 5 \times 5 \times \ldots 5 = 5^{10} = 9\ 765\ 625$ modos. Logo, só se pode ter a certeza de que dois candidatos fornecem exatamente as mesmas respostas se houver pelo menos 9 765 626 candidatos.

Exemplo 3. Em uma reuniao há n pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de outros participantes (admitimos que “conhecer”seja uma relação simétrica, ou seja, se a conhece b, então b conhece a).

Solução: Os objetos são as pessoas. As gavetas, naturalmente, são as quantidades de pessoas conhecidas. Temos, no entanto, uma dificuldade: as possíveis quantidades de conhecidos são $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Assim, à primeira vista, temos n gavetas para n objetos, o que nos impede de usar o princípio das gavetas. Note, porém, que as gavetas 0 e $n - 1$ não podem ser usadas simultaneamente: se existir uma pessoa que não conhece nenhum participante, então não pode existir um participante que conheça todos! Assim, uma das gavetas 0 ou $n - 1$ permanece desocupada e os n objetos devem ser, portanto, distribuídos em $n - 1$ gavetas. Portanto, uma delas será ocupada por pelo menos dois objetos, o que mostra que há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de participantes.

Nos casos anteriores, foi bastante simples identificar as gavetas. Nem sempre é assim. Os exemplos a seguir ilustram situações em que é necessário "construir" as gavetas a serem usadas.

Exemplo 4: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução: Neste caso, está claro que os objetos são os 5 pontos. O ponto chave da resolução está na identificação das gavetas. Devemos subdividir o quadrado dado em 4 partes de modo tal que a distância entre dois pontos situados em uma destas partes nunca seja maior que $\sqrt{2}$. A Fig. 1 mostra como fazê-lo: basta dividi-lo nos quatro quadrados determinados pelas retas que unem os pontos médios dos lados opostos. Em cada uma destas quatro "gavetas", a distância máxima entre dois pontos é igual à sua diagonal, que mede $\sqrt{2}$. Portanto, dados 5 pontos, pelo menos 2 estarão em uma mesma "gaveta" e, assim, determinam um segmento de comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

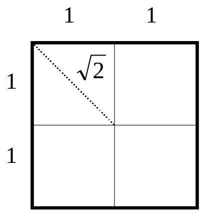

Figura 1

Exemplo 5. Escolha 101 números dentre os elementos do conjunto {1, 2, 3, …, 200}. Mostre que, dentre os números escolhidos, há sempre dois números tais que um divide o outro.

Solução: Antes de mais nada, observe que podemos escolher 100 números do conjunto sem que exista um par onde um número divide o outro: basta tomar os números 101, 102, …, 200. É claro que se acrescentamos mais um número p (obrigatoriamente menor ou igual a 100) a essa coleção, um múltiplo seu já estará lá. Na verdade, podemos garantir que esse múltiplo é da forma $2^r p$ (basta tomar p e multiplicá-lo sucessivamente por 2 até que ele se torne maior do que 100).
Mostraremos que isso ocorre para qualquer conjunto de 101 elementos. Ou seja, *todo subconjunto com* 101 *dos números de* 1 *a* 200 *sempre contém um número e um múltiplo seu obtido através de multiplicação por uma potência de* 2. Note que esta afirmativa é mais **forte** do que a dada do enunciado, mas, como veremos, nos permite estruturar uma demonstração. Isto ocorre com frequência nos problemas envolvendo o Princípio das Gavetas: parte do sucesso nas soluções depende da habilidade em perceber o que deve ser demonstrado. Voltando à solução, observemos que todo inteiro n se escreve, de modo único, na forma $n = 2^r b$, onde r é um inteiro não negativo e b é um número ímpar. Por exemplo, $18 = 2^1.9$, $36 = 2^2.9$ e $125 = 2^0.125$. Para os números de 1 a 200, os valores possíveis de b são os ímpares de 1 a 199, que são 100. Aqui estão nossas gavetas! Já que há 100 valores possíveis de b, qualquer coleção de 101 números de 1 a 200 possui dois números $x = 2^r b$ e $y = 2^s b$ com o mesmo b (isto é, temos dois objetos que serão colocados na mesma gaveta). Se $r < s$, então x divide y; senão, y divide x, o que conclui a demonstração.

O último exemplo requer um argumento um pouco mais sofisticado.

Exemplo 6: Em uma reunião, há 6 pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (como no exemplo 3 admitimos que, se a conhece b, então b conhece a).

Solução: Usaremos o diagrama da Fig. 2 abaixo para ilustrar a situção.   Cada pessoa é representada por um vértice do hexágono. Quando duas pessoas se conhecem, ligamos os vértices correspondentes por um segmento contínuo; senão, usamos um segmento tracejado. O que devemos mostrar é que, nesta figura, necessariamente existe um triângulo formado por linhas contínuas ou um triângulo formado por linhas tracejadas.

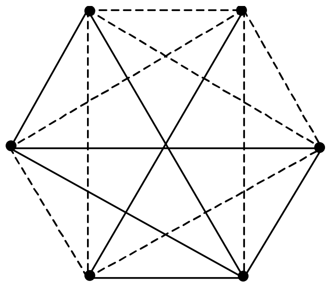

Figura 2

Consideremos os segmentos que incidem em um dos vértices p_1. Como eles são 5, há pelo menos 3 deles que são contínuos ou pelo menos 3 que são tracejados. Admitamos que haja 3 contínuos (o argumento seria análogo no outro caso). Denotemos por p_2, p_3 e p_4 vértices ligados a p_1 por segmentos contínuos (veja a Fig. 3). Se algum dos segmentos p_2p_3, p_2p_4 ou p_3p_4 é contínuo, este segmento, juntamente com os que ligam seus extremos a p_1, formam um triângulo contínuo. Por outro lado, se nenhum deles é contínuo, eles formam um triângulo tracejado, o que completa a demonstração.

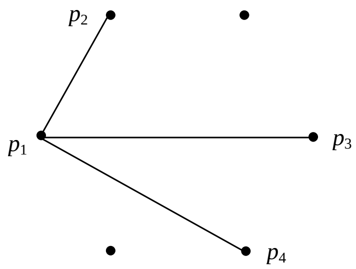

Figura 3

Este exemplo é um caso particular de um teorema mais geral, chamado *de Teorema de Ramsey*. Dado qualquer inteiro $k \geq 3$, existe um inteiro $R(k)$ tal que, em uma reunião de $R(k)$ pessoas, sempre existem k que se conhecem mutuamente ou k que não se conhecem mutuamente. Este resultado normalmente é expresso usando a linguagem de grafos: ao se colorir, com duas cores, as arestas de um grafo completo com $R(k)$ vértices, há sempre um subgrafo completo com k vértices onde todas as arestas têm a mesma cor. (Na realidade, o Teorema de Ramsey aborda situações mais gerais; veja, por exemplo os problemas 8 e 9 abaixo).

Aproveitamos para mencionar a seguinte generalização do princípio das gavetas: Se n objetos são colocados em m gavetas e $n > mk$ (onde m, n e k são números naturais) então alguma gaveta conterá pelo menos $k + 1$ objetos.

Terminamos com uma lista de problemas que podem ser resolvidos com as técnicas aqui ilustradas. As soluções serão publicadas nos próximos números da EUREKA!.

PROBLEMAS

1) Numa gaveta há 6 meias pretas e 6 meias brancas. Qual é o número mínimo de meias a se retirar (no escuro) para garantir que:

a) As meias retiradas contenham um par da mesma cor?
b) As meias retiradas contenham um para de cor branca?

2) Sejam n um natural ímpar e A uma matriz simétrica em que cada linha e coluna seja uma permutação dos inteiros 1, 2,…, n.
Mostre que cada um destes números aparece uma vez na diagonal de A.

3) Mostre que se um subconjunto com $n + 1$ elementos é escolhido do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ então este subconjunto necessariamente contém um par de números primos entre si.

4) Considere 9 pontos de coordenadas inteiras no $\mathbb{Z}^3$. Mostre que o ponto médio de um dos segmentos de reta definidos por estes pontos também tem coordenadas inteiras.

5) Mostre que se n é ímpar e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma permutação de $1, 2, \ldots, n$, então o produto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots(a_n - n)$ é par.

6) Mostre que em qualquer coleção de n inteiros há um subconjunto cuja soma dos elementos é divisível por n.

7) Mostre que em qualquer coleção de n inteiros existe um par cuja soma ou diferença é divisível por n.

8) Mostre que em toda reunião com 10 pessoas existem 3 que se conhecem mutuamente ou 4 que se desconhecem mutuamente. Mostre que, na realidade, o resultado vale mesmo que na reunião só existam 9 pessoas.

9) Dados inteiros $a, b \geq 2$, seja $N(a, b)$ o menor número para o qual, dado um conjunto com $N(a, b)$ pessoas, sempre existam a que se conheçam mutuamente ou b que se desconheçam mutuamente (se existir tal número). Os problemas anteriores implicam que $N(3, 3) \leq 6$ e $N(3, 4) \leq 9$. Mostre que:

a) $N(a, 2) = a$;
b) $N(a, b) = N(b, a)$;
c) $N(a, b) \leq N(a - 1, b) + N(a, b - 1)$; observe que, em consequência, $N(a, b)$ existe para todo par (a, b).

10) Dois discos A e B são divididos em $2n$ setores iguais. No disco A, n setores são pintados de azul e n de vermelho. No disco B, os setores são pintados de azul ou vermelho de forma completamente arbitrária.
Mostre que A e B podem ser superpostos de modo que pelo menos n setores tenham cores coincidentes.

11) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ subconjuntos distintos de um conjunto X satisfazendo a propriedade de que cada A_i possua mais da metade dos elementos de X.
Mostre que existem 6 elementos $x_1, x_2, \ldots x_6$ de X tais que cada A_i contenha pelo menos um destes 6 elementos.

12) Considere um conjunto A com n elementos. Seja F uma família de subconjuntos de A tal que:

- Quaisquer dois elementos de F têm interseção não vazia.

- Nenhum outro subconjunto de A intersecta todos os elementos de F.

a) Dê exemplo de uma família F satisfazendo a estas condições.
b) Mostre que F possui 2^{n-1} elementos.

13) Uma fábrica produz pelo menos uma unidade de um produto X por dia e no máximo 10 unidades deste produto por semana. Mostre que dado qualquer inteiro positivo n existe um conjunto de dias consecutivos em que a produção total é igual a n [Sugestão: mostre que existe um número k (dependente de n) suficientemente grande para o qual os conjuntos $\{S_1, S_2, \ldots S_k\}$ e $\{S_1 + n, S_2 + n, \ldots, S_k + n\}$ tem pelo menos um elemento comum, onde S_i é a soma das produções nos dias 1, 2, …, i.].

14) Mostre que toda sequência com $n^2 + 1$ elementos possui uma subsequência crescente com $n + 1$ elementos ou uma subsequência decrescente com $n + 1$ elementos.

15) Sejam $mn + 1$ elementos tais que $a_1 < a_2 < \ldots < a_{mn+1}$. Mostre que ou existem $m + 1$ destes números tais que nenhum é divisor de um outro ou existem $n + 1$ deles tais que cada um é divisor do seguinte.

16) Prove que se o conjunto {1, 2, 3, …, 1978} é partido em 6 subconjuntos, em algum destes subconjuntos existe um elemento que é igual à soma de dois elementos, não necessariamente distintos, do mesmo subconjunto.

17) Considere um conjunto com $2n$ pontos.

a) Mostre que é possível conectar estes pontos com n^2 segmentos de reta sem que um triângulo de vértices nos pontos dados seja formado.
b) Mostre que se os pontos são conectados por $n^2 + 1$ segmentos de reta, então pelo menos um triângulo é formado.

18) Considere um conjunto de n pontos 1, 2, …, n. Para cada par de pontos é escolhida uma orientação para o segmento de reta que os une. Se o segmento ij é orientado de i para j dizemos que $i \to j$. Mostre que existe uma permutação $a_1, a_2, \ldots a_n$ de 1, 2, …, n tais que $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$.

19) São dados n pontos azuis e n pontos vermelhos no plano. Mostre que é possível formar n pares de pontos (um azul e um vermelho em cada par) de modo que os n segmentos de reta definidos por estes pares não se cruzem.

20) Mostre que dados 5 pontos do plano em posição geral há 4 que formam um quadrilátero convexo.